Hilda Pollaczek-Geiringer's rigidity papers

Brigitte Servatius

Worcester Polytechnic Institute

1893–1973

Jan Peter Schäfermeyer recently made the rigidity community aware of the work of Hilda Pollaczek-Geiringer who published some papers on 2- and 3-dimensional trusses in the 1920's and 30's. [9, 10]; [4].
While Laman's paper has no bibliography, Hilda cites

- Föppl [1] for stress/motion
- Möbius [6] for initiating the study of exceptional frameworks
- Mohr [7] for geometrically studying exceptional frameworks,
- Müller-Breslau[8](6 points on a conic),
- Frobenius [2] for a theorem on determinants
- Kötter [3] for rigid frameworks on few edges
- Liebmann [5] for exceptional frameworks and their determinant
- Schur [11] for 1-extension.

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Fachwerk von k Knoten und $(2k - 3)$ Stäben brauchbar sei, ist, daß es kein Teilsystem von l Punkten $(4 \leq l < k)$ enthält, die durch mehr als $(2l - 3)$ »innere« Stäbe mit einander verbunden sind.

Jedes komplette anhäufungslose ebene Fachwerk ist brauchbar.

A framework on k vertices and $2k - 3$ edges has an infinitesimally rigid realization if and only if it contains no subframework on l vertices, $4 \leq l < k$ and more than $2l - 3$ edges.

Note: The theorem does NOT hold in space:

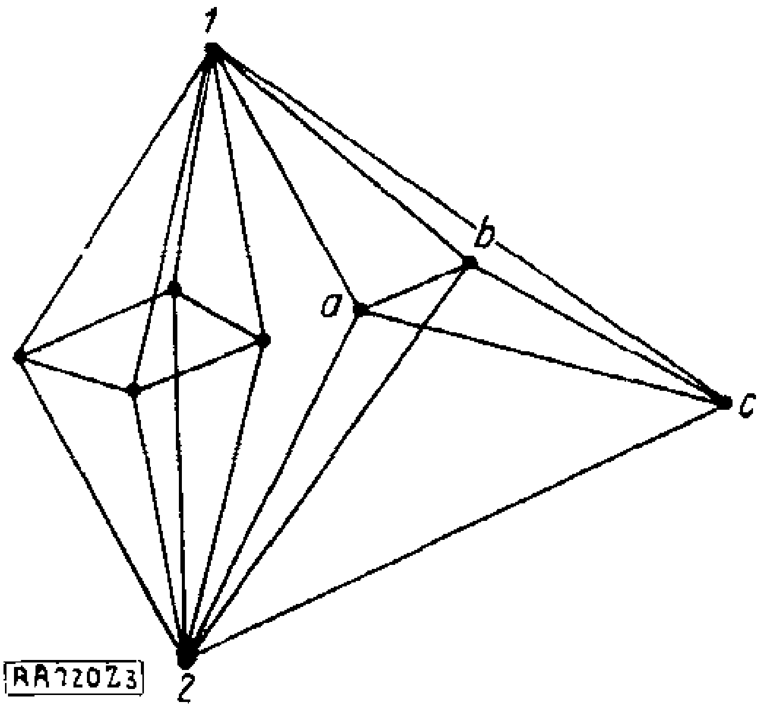
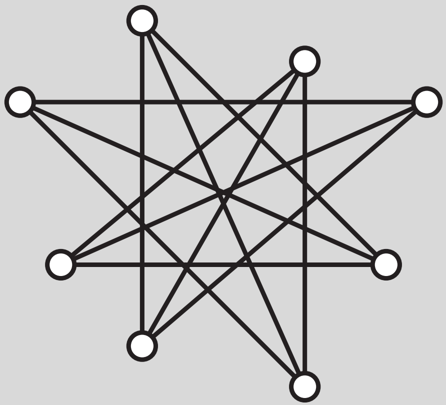
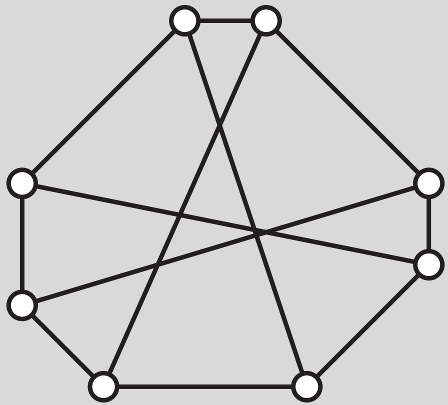


Abb. 3.

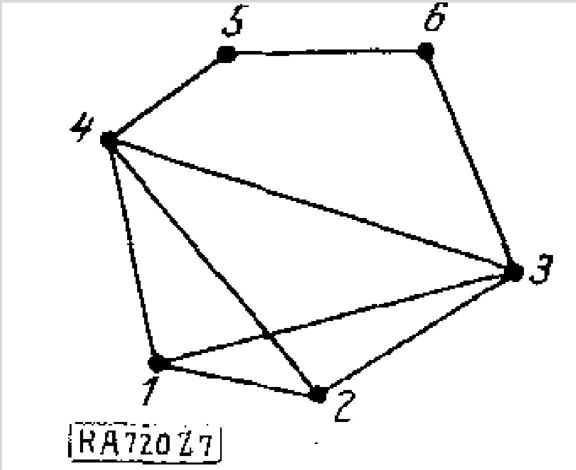
Home Page
Title Page
Page 4 of 22
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Note: There is a difference between rigidity and infinitesimal rigidity. Rigidity may be achieved with fewer edges [3].

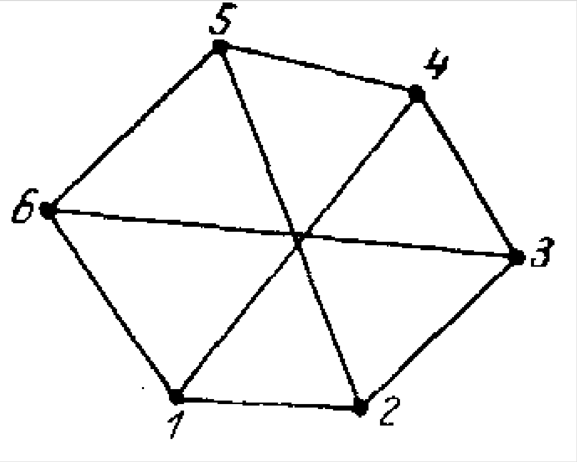




$$\begin{vmatrix}
y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_4 & 0 & 0 & x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & x_5 - x_4 & y_5 - y_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_6 & y_5 - y_6 & x_6 - x_5 & y_6 - y_5 \\
0 & x_3 - x_6 & y_3 - y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_3 & y_6 - y_3
\end{vmatrix}$$



$$
\begin{matrix}
y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & x_5 - x_4 & y_5 - y_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_6 & y_5 - y_6 & x_6 - x_5 & y_6 - y_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_1 & y_6 - y_1 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 - y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 & y_5 - y_2 & 0 & 0 \\
0 & x_3 - x_6 & y_3 - y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 - x_3 & y_6 - y_3
\end{matrix}
$$



Gibt es in einem kompletten F_k eine Anhäufung von l Punkten, d. h. ein Teilsystem von $l \geqq 4$ Punkten, das um $\varrho > 0$ mehr als $2\,l - 3$ innere Stäbe enthält, so gibt es auch eine Gruppe von $m = k - l$ Punkten, die um ϱ weniger als $2\,m$ äußere und innere Stäbe enthält.

If a framework on k vertices and $2k-3$ edges contains an l-subset A of vertices spanning $2l-3+\rho$ edges, then there also exists an m-subset B of vertices such that $2m-\rho$ edges have an endpoint in B, where $m = k - l$.

Home Page

Title Page

Page 9 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

The proof of the main theorem proceeds by induction on the number of vertices and uses a combinatorial lemma and a kinematic lemma.

Wenn es in einem anhäufungslosen $F_k^{(\nu)}$ ($\nu \geq 0$) ein Punktetripel 1, 2, 3 gibt, so daß jedes der drei Punktepaare (1, 2), (1, 3), (2, 3) des Tripels einem kompletten System angehört, etwa (1, 2) einem S_3, (1, 3) einem S_2, (2, 3) einem S_1, so gibt es auch ein komplettes System S, dem alle drei Punkte 1, 2, 3 angehören.

Aus einem starren kompletten F_{k-1} erhält man ein starres komplettes F_k wenn man einen beliebigen Stab (m, n) herausnimmt, — dies ergibt ein $F_{k-1}{}^{(1)}$ — und dann an drei solche Punkte 1, 2, 3 die durch Herausnahme von (m, n) eine gegenseitige Beweglichkeit erlangt haben, einen drei-stäbigen Knoten k so anhängt, das bloß k nicht auf einem gewissen Kegelschnitt dem sogenannten »gefährlichen Ort« von k, den man in $\bar{F}_{k-1}{}^{(1)}$ einzeichnen kann, zu liegen kommt (Abb. 12).

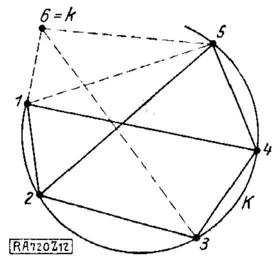


Abb. 12.

Generalization of the main theorem to mechanisms.

Lemma:

In ein anhäufungsloses $F_k^{(\nu)}$, dem ν Stäbe fehlen, kann man stets ν Stäbe so einziehen, daß das entstehende F_k wieder anhäufungslos ist.

An independent edge set on k vertices and size $2k-3-\nu$ may be augmented by ν edges to a rigid and independent set on the same vertex set.

Characteristic for the plane

Wenn in einem anhäufungslosen $F_k^{(\nu)}$, dem ν Stäbe fehlen, irgend zwei Punkte starr verbunden sind, so gibt es stets ein komplettes System, dem sie angehören.

Minimally dependent edge sets are rigid.

Not true in higher dimensions.

Algebraic interpretation:

In der Matrix von $2k-3$ Zeilen und $2k$ Kolonnen der Fachwerksgleichungen (4) verschwindet dann und nur dann keine $(2k-3)$ reihige Determinante identisch, wenn es in dieser Matrix keine Gruppe von $p\,(p < 2k-3)$ Spalten gibt, in der alle Elemente gleich Null sind, welche diese p Spalten mit mehr als $(2k-3)-p$ Zeilen gemeinsam haben.

In a rigidity matrix with $2k-3$ rows and $2k$ columns no $2k-3$ sub-determinant is identically zero if and only if there is no p-set of columns $(p < 2k-3)$ where all elements are zero which these p columns have in common with more than $(2k-3)-p$ rows.

Frobenius [2] A determinant of order n some of whose elements are zero and the others independent variables is identically equal to zero if and only if there exists at least a group of p rows in which more than $n-p$ columns contain all zeros.

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 13 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Frobenius didn't think highly of graph theory:

negativ, so verschwinden alle Elemente von C, demnach alle Elemente der $p$ten Spalte, und mithin ist $s = 0$.

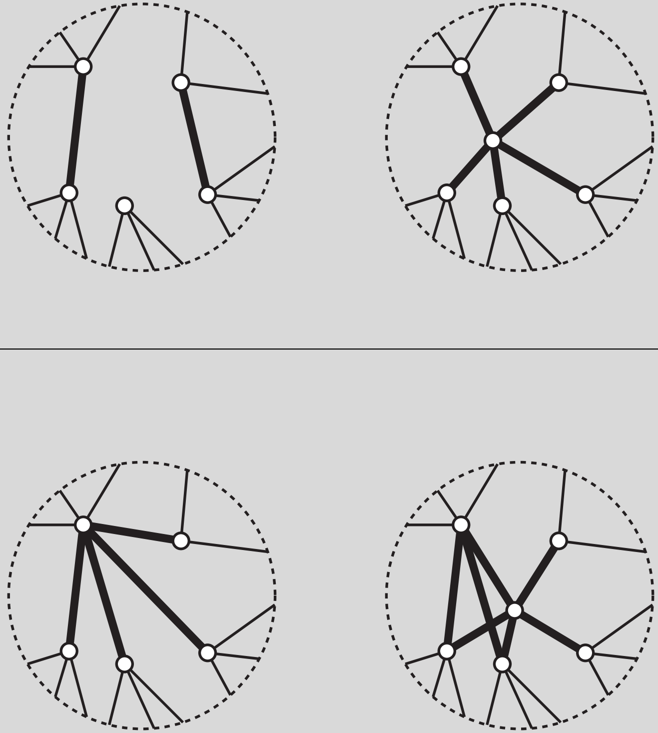
Die Theorie der Graphen, mittels deren Hr. König den obigen Satz abgeleitet hat, ist nach meiner Ansicht ein wenig geeignetes Hilfsmittel für die Entwicklung der Determinantentheorie. In diesem Falle führt sie zu einem ganz speziellen Satze von geringem Werte. Was von seinem Inhalt Wert hat, ist in dem Satze II ausgesprochen.

Laman [4]'s motivation:
...If definitions are given at all they tend to excel by ambiguity and obscurity. For the purpose of this paper clear definitions are indispensable. That is why we give new definitions of skeletal structure and of (infinitesimal) rigidity.

Hilda's 3D paper [10]

- combinatorial proof that triangulations of the sphere are rigid.
- augmentation of 3D Henneberg moves
- some practical examples

Henneberg and Hilda moves



Hilda's examples

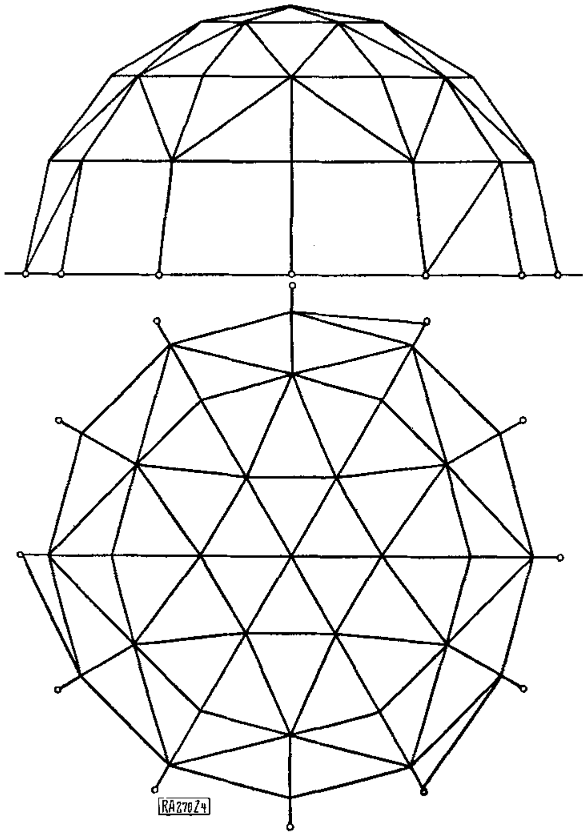


Abb. 4.

Hilda's examples

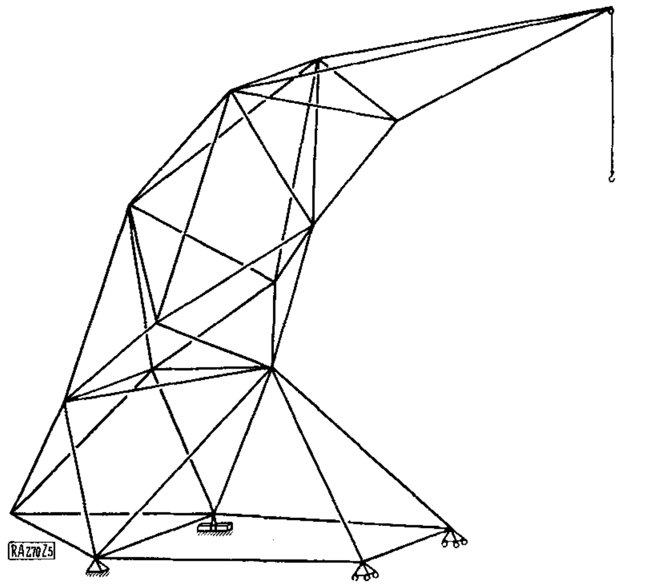


Abb. 5.

Hilda's examples

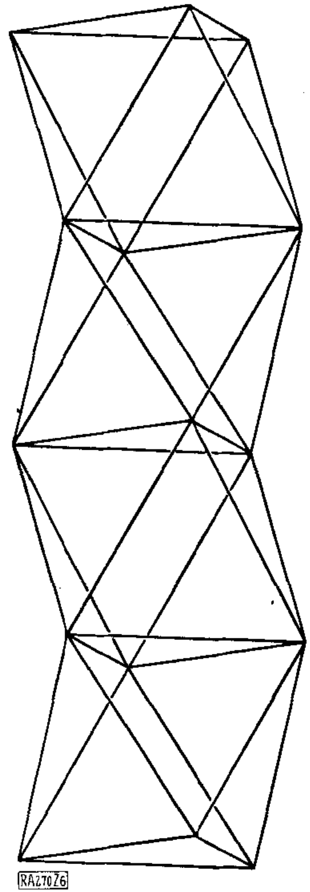


Abb. 6.

Hilda's examples

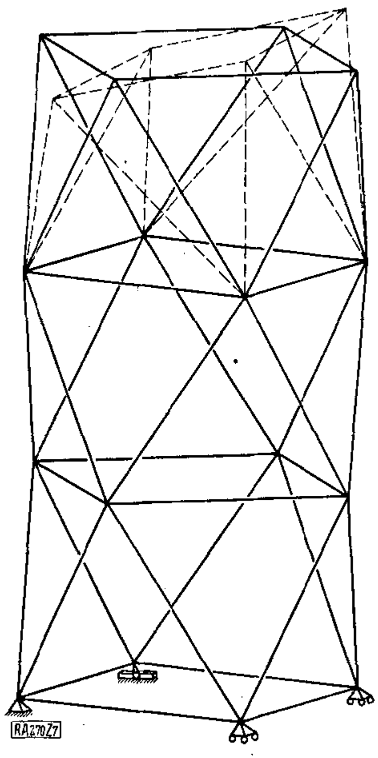


Abb. 7.

Hilda's examples

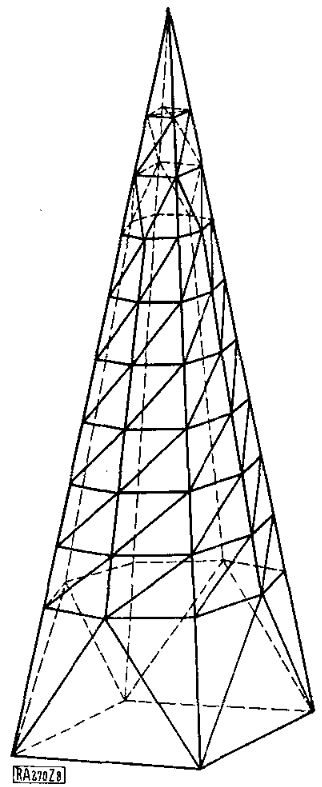


Abb. 8.

Home Page
Title Page
Page 21 of 22
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Home Page

Title Page

Page 22 of 22

Go Back

Full Screen

Close

Quit

References

[1] A. Föppl. *Theorie des Fachwerkes.* 1880.

[2] F. G. Frobenius. Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsberichte der Berl. Akademie*, XVIII, 1917.

[3] E. Kötter. Über die Möglichkeit n Punkte in der Ebene oder im Raum durch weniger als $2n - 3$ oder $3n - 6$ Stäbe von ganz unveränderlicher Länge unverschieblich miteinander zu verbinden. *Festschrift für H. Mueller-Breslau*, 1912.

[4] G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *J. Engrg. Math.*, 4:331–340, 1970.

[5] H. Liebmann. Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. *Münch. Ber.*, pages 197–227, 1920.

[6] Möbius. *Lehrbuch der Statik*, volume 4. 1837.

[7] O. Mohr. *Civil Engrg.*, (2)31:289, 1885.

[8] H. Müller-Breslau. *Statik der Baukonstruktionen.*

[9] H. Pollaczek-Geiringer. Über die Gliederung ebener Fachwerke. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 7(1):58–72, 1927.

[10] H. Pollaczek-Geiringer. Zur Gliederung räumlicher Fachwerke. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 12(6):369–376, 1932.

[11] F. Schur. *Graphische Statik.* 1915.